构建清史学科自主知识体系

编者按：构建清史学科自主知识体系，需要研究者拓展问题视野，以更具体的问题为切入点，阐述清代中国的历史演进趋势。本期高牧原的论文，详细考察嘉庆年间中国方程理论的突破性发展，并揭示其所带来的学术推进，既符合科学理论的发展趋势，又根植于中国独特的历史文化渊源。

嘉庆年间中国方程理论的新发展

高牧原

［摘要］ 清代嘉庆年间，中国的方程理论凭借西学东渐和宋元数学重新发现得到了突破性发展。汪莱发现了《数书九章》中方程少解问题，并以此开始致力于方程数值正根的一般情况。李锐精研宋元数学，并在与汪莱交流的基础上探索出了符号法则。面对汪莱新的质疑和发展宋元数学的需要，李锐的《开方说》最终完善了方程根数的普遍规律，并在这一过程中提出了数系的扩展。

[关键词] 嘉庆 数学 方程 李锐 汪莱

[**中图分类号**] K249.3 [**文献标识码**] A [**文章编号**] 1002 – 8587（2026）– 02 – 0065 – 013

一、西学东渐前后中国方程理论的发展脉络

中国古代数学对高次方程的研究有着悠久的历史，从《九章算术》提出开方问题到宋元时期发展至顶峰，数学家得以解决不同系数模式的高次方程。宋金时期，中国在高次方程方面的探索以李冶（1192—1279）、秦九韶（1208—1268）、杨辉（1238—1298）为楷模。其中，秦九韶的《数书九章》（1247）使用方程解决了当时经济社会中的主要数学问题，并在刘益和贾宪的基础上，将开方术发展到了新的高度。同一时期李冶的《测圆海镜》（1248）推动了中国古代方程理论的长足发展，与秦九韶直接将所求具体意义化入等式中不同，《测圆海镜》将未知数统称“天元一”，更具理论性。及至元代，朱世杰（1249—1314）集宋金诸子之长，作《四元玉鉴》（1303），发展出了四元术和系统的垛积招差理论，达到中国传统数学的至高点。

明代统治者对数学缺乏重视，儒家知识分子对学问的认识大多被八股取士和四书章句所局

［收稿日期］ 2024–12–26
［作者简介］ 高牧原（1997— ），男，中国科学院大学人文学院博士研究生，北京 100049，gaomuyuan19@mails.ucas.ac.cn

限，这使得辉煌的宋元数学传统遭遇了断代和失传。学科互动方面，明代天文工作长期依赖于《回回历》，元代天文学家郭守敬（1231—1316）在《授时历》（1281）中使用的一些比较高级的数学方法也没有被继承下来。数学的发展缺乏客观上的有利条件，民间数学活动中比较突出的也只有王文素和程大位等人的一些技术性工作，被李俨称为“中算沉寂时期”。①

明末清初，耶稣会传教士入华后开始了数学译介工作，其中比利时人安多（Antonie Thomas，1644—1709）作《借根方算法》，这使高次方程首先以西学的形式进入清代主流知识分子的视野。经历了一定的“会通”工作后，清中叶的知识分子学习借根方理论的主要材料为《数理精蕴》（1723）版的《借根方比例》。《数理精蕴》的编纂团队在该书的前半部分提供了线部、面部和体部三大几何方面的基础知识，将线、面、体作为理解一、二、三次方程的脚手架，并在面部中引入“带从平方”的概念，利用中算和几何学辅助读者对借根方的初步理解。

尽管西方科学的译介工作在雍正年间中断，但随着乾隆年间《四库全书》编纂工作的深入，宋元数学成果的各种藏书逐渐被发掘出来，首先被关注并收入《四库全书》的就是秦九韶的《数书九章》和李冶的《测圆海镜》。其中，《数书九章》是四库馆依《永乐大典》本收入，《测圆海镜》则以李潢藏本收入。在李冶和秦九韶的著作中，“天元一”和“开方”等话语足以与西方传入的高次方程形成对比。因此，清代学者对方程问题的历史认识并不依照时间顺序，而是先认识西来之法，后发现传统数学。

无论是对抗西方学术、增强民族自信心的“天朝上国”心态，还是乾嘉学派梳理学术发展史、正本清源的学术导向，在客观上都有利于宋元数学研究的开展。在戴震、钱大昕等学术领袖的鼓励下，具有数学造诣的知识分子和学术幕主开始致力于阐释和发掘宋元数学的价值。又因为乾嘉之际已经被发掘的宋元数学成果，以李冶和秦九韶的著述为主，学者不免将目光聚焦于秦、李对方程发展的贡献。

在以上因素催化之下，嘉庆年间的中国数学发展面貌一改康熙帝逝世之后的趋于低潮，数学活动重返主流学术舞台，数学家在宋元数学的基础上还进行了一定的理论探索，方程理论的发展就是其中璀璨的明珠，这些理论集中在汪莱（1768—1813）的《衡斋算学》和李锐（1768—1817）的《开方说》中。事实上，在乾隆年间，孔子的后人孔广森（1751—1786）由于参与四库编修的便利更早接触到了秦、李著述，并作《少广正负术内外篇》，但其数学水平一般，未能最大化发掘宋元数学的价值。除此之外，李潢（？—1811）、张敦仁（1754—1834）等有一定学术影响力的官僚同样进行过一些针对宋元数学的文献学工作，这些数学工作对时人将目光转向数学有一定积极作用，但这些工作对数学理论发展只有间接的作用，狭义的数学研究主要集中在李锐和汪莱为代表的方程根数研究。徐义保通过考察明代以前数学著作中的方程（$x^n=c$ 型之外）及给出的根，认为刘益、秦九韶、朱世杰等都已认识到方程可能存在不止一个正数根，但受制于考虑的方程类型及中国古代数学的实用性特质，对这方面的理论探索缺乏重视。② 嘉庆年间的数学家吸收了欧洲传来的部分数学知识，又熏陶于乾嘉学派的学术风气，所以不容易被实用性思维所束缚，最终在原本被忽视的方程根数问题上开拓出了新的境界。

对这一系列数学成就的阐释和归因已有较成熟的研究背景，李俨首先以“方程论”将李锐和汪莱著述中方程理论的内容整理在一起，内容相对简略。③ 钱宝琮复原了李锐和汪莱的数学发现，肯定了《开方说》中李锐方程理论的卓越成就。④ 刘钝对李锐符号法则层面的贡献和研究方

① 李俨：《中国数学大纲》，商务印书馆，2020 年，第 335 页。
② 徐义保：《中算家对方程正根个数的认识》，李迪主编：《数学史研究文集》第 2 辑，内蒙古大学出版社，1991 年，第 66−70 页。
③ 李俨：《中国数学大纲》，第 608−612 页。
④ 钱宝琮：《中国数学史》，商务印书馆，2019 年，第 339−347 页。

法予以解读，并认为李锐的这一成就受到乾嘉学术风气的影响。① 朱家生通过对《开方说》的文本分析发现李锐“代开法”的数学理论意义，亦指出了其在计算过程中的局限性。② 吴裕宾考证了汪莱和李锐之间关于方程正根的一段误会，但未能深入探索其中的历史经纬。③ 洪万生以“谈天三友”为架构，结合乾嘉学术的时代背景梳理了焦循、李锐和汪莱的数学工作，特别强调学术取向对李锐和汪莱研究工作的影响，④ 但方程理论研究中的技术细节并不能在该研究中社会文化的视角下得到充分解释。川原秀城认为汪莱和李锐的数学研究摆脱了戴震狂热主义的局限性，是一种“新类别”的研究，“达到了完全不同的维度层次”，贯彻了演绎推论主义，接近纯粹和理论的代数领域。⑤ 李兆华系统阐释了汪莱关于方程的观点，认识到了汪莱关注方程根数的首创意义，开始关注对研究具体思路的阐释。⑥ 艾尔曼（Benjamin A. Elman）只总结了李锐的校勘和算草工作，认为他的主要贡献在于解决古代的数学难题，忽视了其《开方说》中所体现的创造力，特别是将李锐与古典考据学者笼统地同归一类，称其“走上了根据古学而非数学本质来探索真理的歧路”，这对李锐是很不公平的。⑦ 段耀勇等探讨了李锐对开方术的改进及其灵感来源，特别是他对“步法”创新的贡献，启发了学界对李锐开方术数学价值的新认识，即李锐工作的创造性是大于其总结性的。⑧

可以看到，对李锐和汪莱的方程论研究从概括与整理逐渐细化到对技术手段的研究，对二人研究思路的探索亦有进展，但这些工作尚未被放到二者学术互动的视角下。笔者在探究其成就具体内容的基础上，借助问题意识的视角，对嘉庆年间方程理论发展的两大核心人物汪莱和李锐的研究思路和数学发展的历史脉络予以梳理，关注这一历史进程下学术交流中的知识增长。

二、问题提出：汪莱对宋元数学的挑战

对方程根数的初始讨论源于汪莱在《衡斋算学》第二册（1798）中对解三角形的分类讨论研究，后扩展到对秦九韶《数书九章》中尖田求积问题及李冶《测圆海镜》中类似问题的研究。

汪莱，字孝婴，又字少婴，号衡斋，安徽歙县人，自幼对数学、天文学兴趣浓厚，并将其作为一生的志趣。⑨ 在展开广泛的数学交流前，汪莱的数学研究材料主要为清廷编纂的《数理精蕴》，他对其中的三角函数和解三角形知识进行了重点研究。对于非等腰直角三角形的情况，给定面积与勾弦和（或股弦和，不失一般性），必然解出两个不同的直角三角形。梅瑴成（1681—1763）在对此求解时正确列出方程，但漏掉其中一解，汪莱发现后便着手探索将此类问题答案解全的普遍方法。实际上，若勾弦和为 t，三角形面积为 S，只需将题干中所涉及的直角边设为 a，按照勾股定理列出方程 $a^2+4S^2\div a^2=(t-a)^2$ 后求解即可，实际求解时需将原方程消去 a^2 转化为一元三次方程 $2ta^3-t^2a^2+4S^2=0$，即带从长立方。汪莱在求解过程中没有直接将勾弦和的代

---

① 刘钝：《略论李锐的数学研究方法——以方程正根个数的判定为例》，洪万生主编：《谈天三友》，明文书局，1993 年，第 255–262 页；刘钝：《李锐与笛卡儿符号法则》，《自然科学史研究》1989 年第 8 期。

② 朱家生：《李锐高次方程数值解法新探》，《扬州师院学报（自然科学版）》1989 年第 3 期。

③ 吴裕宾：《汪莱、李锐齮龁辨》，《中国科技史料》1990 年第 3 期。

④ 洪万生：《谈天三友焦循、汪莱和李锐——清代经学与算学关系试论》，洪万生主编：《谈天三友》，第 43–124 页。

⑤ 川原秀城：《清代中期的学术和历算学》，川原秀城编：《西学东渐与东亚》，毛乙馨译，上海社会科学院出版社，2022 年，第 211–232 页。

⑥ 李兆华：《汪莱方程论研究》，《自然科学史研究》1992 年第 3 期。

⑦ 艾尔曼：《科学在中国（1550—1900）》，原祖杰等译，中国人民大学出版社，2015 年，第 337–339 页。

⑧ 段耀勇、周畅、段垒垒、孙青辉、李育安：《关于李锐“步法”与方程的多个正根求法的讨论》，《内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版）》2020 年第 5 期；段耀勇、周畅、段垒垒、孙青辉：《开方术与多个正根方程：从“可知”到“不可知”》，《广西民族大学学报（自然科学版）》2019 年第 4 期。

⑨ 郑坚坚、汪宜楷：《关于汪莱的字、号及其他》，《中国科技史料》1994 年第 1 期。

数形式抽象化，需要建立一个“中率”求出两个“勾弦较”，再代入基于三边长的勾股定理方程求解。这里汪莱直接假定必能解出两个不同的三角形，并没有讨论当$S=\frac{\sqrt{3}}{18}t^2$时，方程解出重根$a_1=a_2=\frac{1}{3}t$的情形。在尚未得到新的研究材料之前，汪莱还相继涉猎了三角函数制表、球面三角学和组合数学等领域，成果颇丰。

1801 年，汪莱与清代著名经史学家、数学家焦循（1763—1820）在扬州相会，从焦循处得到《测圆海镜》《益古演段》和《数书九章》（时抄本名为《数学大略》）等抄本，本就对数学有浓厚兴趣的汪莱很快沉浸于这些新作品的研究。“天元术”是宋元数学最具有代表性的成果，它与增乘开方法结合，构成了古代中国的方程理论体系。这些数学成果与西方传来的借根方等代数学理论的相通之处，更引发了中国数学家的积极研究和思考。

汪莱关注到了《数书九章》第五卷中尖田求积问题的方程解法，其原文为：

> 问：有两尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何？
>
> 答曰：田积八百四十步。
>
> 术曰：以少广求之，翻法入之。置半广自乘为半幂，与小斜幂相减，相乘，为小率。以半幂与大斜幂相减，相乘，为大率。以二率相减，余自乘，为实。并二率，倍之，为从上廉。以一为益隅，开翻法三乘方，得积，一位开尽者，不用翻法。①

在秦九韶的解法中，两个同底等腰三角形面积之和的求解被复杂化为一个“玲珑三乘方”，即一个只有常数项、二次项和四次项的一元四次方程 $-x^4+763200x^2-40642560000=0$。

尽管计算的数值很大，且一次项和三次项系数为 0，但秦九韶仍未能意识到通过换元简便计算，而是直接试出最高位数 8 并进行减根变换，因其中一解为 840，两次试商的计算量仍可接受。“三乘方”意为乘以原数值三次，比现代表述“四次方”更加直观，抽象不足，难以发现通向换元的数量关系，在早期翻译西方数学著作的过程中，四次方的表述未能引入，故及至嘉道时期皆依古例。

汪莱发现，“《数学九章》田域第二题尖田求积二百四十步与八百四十步共数，而秦道古专以八百四十为答”，李冶依天元术解实际问题的过程中亦有类似情形。汪莱据此认为，李冶和秦九韶的工作中有不完善的部分，依实事求是的态度，需要加以改进。原著中 840 的数值解为依图例所得两等腰三角形面积之和，即一个常规的凸四边形；而汪莱求得的 240 亦有几何意义，即两等腰三角形面积之差形成的凹四边形，这一图形不是秦氏心中的尖田概念，也就是说，汪莱基于方程的多出的正根拓展了秦氏尖田对应的图形。对秦九韶原著中所列方程来说，增加的数值解是由于秦九韶将本不必列方程求解的问题复杂化，将面积总和作为未知数列出平方根方程所致。根据徐义保的研究，② 还有一种情况，即秦九韶并非错失小根，而是求出后默认“尖田”形状在生产实践中的意义，依照题意将小根舍去，舍去的过程未体现在最终文本中，③ 这一未列入原著中的小根也成了汪莱理论建设的立足点。

在指出上述问题后，汪莱并没有止步于将方程解尽，而是独立地将高次方程数值正根的一般情况（包括有无和是否多于一个）作为一个新问题来研究。汪莱尝试穷举各种类型的高次方程来确定正根方面的一般规律，但讨论内容以二次、三次方程为主，没有涉及一元四次方程。

---

① 秦九韶：《数书九章》，重庆出版社，2021 年，第 144−145 页。

② 徐义保：《中算家对方程正根个数的认识》，李迪主编：《数学史研究文集》第 2 辑，第 66−70 页。

③ 段耀勇、周畅、段垒垒、孙青辉、李育安：《关于李锐“步法”与方程的多个正根求法的讨论》，《内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版）》2020 年第 5 期。

汪莱援引孔子的“知之为知之，不知为不知，是知也”(《论语·为政》)，将可以开出正根的方程分为“可知”（一个数值正根）和“不可知”（多个数值正根）。考虑到李锐随后认识到重根，应辨析汪莱强调的解为数值解。此前的《衡斋算学》研究多称“正根”，这一话语在现代数学意义上是包括重根的，这一细节的差异导致汪莱与李锐后期关于方程理论的分歧遭到忽视。

显然，一个一元高次方程的数值正根不会超过该方程的次数。汪莱以《数理精蕴》的方程解法为基础，通过换元将一般系数的二次、三次方程转化为带从开平方、带从开长立方或扁立方的形式，在这些转化后的方程形式的基础上分类讨论，以实现有效归纳。汪莱将二次、三次方程的诸多变号情况一一讨论，共总结出 96 种情况。汪莱的结论一方面存在讹误，一方面由于拒绝了数的一般理念最终导致拒绝重根。① 但将根数与 n 次项系数的正负号联系起来，为进一步解答关于方程根数一般规律的谜题提供了基础，是在数值解之外进行符号化探讨的重要进步。

三、研究推进：李锐与汪莱的研讨

在汪莱推敲李、秦的不足之前，李锐早已开始着力研究宋元时期的数学成果了。李锐，字尚之，号四香，江苏元和（今苏州市）人，自幼天赋异禀，尤爱天文历算。在紫阳书院学习期间，李锐受钱大昕赏识，“大昕为当代通儒第一，生平未尝轻许人，独于锐则以为胜己”。② 乾嘉之际，在考据学范畴扩大化的背景之下，宋元数学诸多遗珠陆续重返中国知识分子的视野。嘉庆元年（1796）春天李锐便致信焦循，寻求这些算书：

> 算书难得，锐所渴望一见而未得者甚多，今略开四种如后，倘兄处有此，能寄来一读，则惠我多矣。宋秦九韶《数书九章》十八卷、元李治《测圆海镜》十二卷、《益古演段》二卷、国朝王寅旭《晓庵新法》六卷。③

李锐得到这些抄本后，受学术幕主阮元（1764—1849）之托代为校勘重版，他还于同年完成了《海岛算经图解》和《缉古算经草》等唐代数学著作的补充图草，次年又完成了李冶另一部著作《益古演段》的校勘工作。除了这些基本出版工作外，他还将目光放在开方术的阐释与推广上。据焦循记载，“尚之喜甚，为之疏通证明，复推其术于弧矢，著书以明郭太史《授时草》所用天元一术”。④ 由于这些成果的确代表中国古代数学运算的顶峰，李锐的工作得到了乾嘉学派学术领袖的青睐。此外，李锐还主笔了阮元牵头编纂的《畴人传》，对已知数学著作的宋元诸家予以整理和评价，其中着重赞扬了李冶和秦九韶的数学贡献。焦循对秦、李的数学著作亦有研究，作《乘方释例》（1794）、《天元一释》（1800）和《开方通释》（1801），内容多为阐释性质，虽创新不足，但其中义理建构的模式对李锐和汪莱的理论工作起到一定影响。综上，在汪莱的归纳模式之前，焦循和李锐对宋元数学和开方理论已有充分的掌握。

1802 年，汪莱将从秦、李讹误中引发的方程根数问题的初步研究，即《衡斋算学》第五册的草稿寄给焦循和张敦仁，后者“谓之过苦”而不予重视。焦循于同年秋季拜访李锐，与他共同研讨汪莱的成果。李锐进一步简化了汪莱所归纳的 96 种情况，作“开方三例”：

> 其一，凡隅实异名，正在上负在下，或负在上正在下，中间正负不相间者，可知。其二，凡隅实异名，中间正负相间，开方时其与隅异名之从、廉皆翻而与隅同名者，可知；不者，不

① 李兆华：《汪莱方程论研究》，《自然科学史研究》1992 年第 3 期。

② 罗士琳：《畴人传国朝续补二·李锐》，冯立昇主编：《畴人传合编校注》，中州古籍出版社，2012 年，第 450–451 页。

③ 李锐：《观妙居日记（下）》，尧育飞整理，上海图书馆历史文献研究所编：《历史文献》第 23 辑，上海古籍出版社，2021 年，第 53 页。

④ 焦循：《第五册算书焦记》，李兆华：《衡斋算学校证》，陕西科学技术出版社，1998 年，第 211 页。

> 可知。其三，凡隅实同名者，不可知。[①]

至此，李锐至少已经得出了一个具备符号法则形式的结论，这一结论仍有待纠错和发展，[②] 李锐方程论的其他主要成果亦尚未在这一时期发展出来。1803 年秋季，汪莱拜访焦循，得到李锐关于“开方三例”的手稿，即《第五册算书跋》，澄清了“或谓尚之稍讥吾所著之书”的误会。

汪莱将《第五册算书跋》及其余论附于《衡斋算学》第六册中，故他与李锐的思想碰撞在其中亦有所体现。参考了李锐类似笛卡尔符号法则的结论后，汪莱的评论没有完成对数值解局限性的突破，反而认为李锐的工作方向是错误的路线：

> 尚之此例足为余书之凡，而余书所谓不可知之数，有二数相淆者，有三数相淆者，推之三乘方以上，则有恒河沙、不可思议、无量数相淆者。必辨其为二、为三、为恒河沙、不可思议、无量数，皆著其求之之法以示后人使不生疑惑，则又非例所能括者。故余于二乘方以下已煞费苦心，而尚之亦不得例也。[③]

这一质疑针对李锐的“凡隅实同名者，不可知”，例如重根二次方程满足李锐的上述条件，但出现的数值解只有一个，但结论为“不可知”的情况，这种情况被汪莱称作“相淆”。从“相淆”这一表述看，汪莱认为重根是杂乱无章的，在抽象认识问题的能力上终逊李锐一筹。实际上，“相淆”的概念最早出现在《衡斋算学》第五册中的“第五十一条补法”里：

> 若见少于几真数，即以此相较余真数命为带纵长立方积，相减余根数命为方法，假一根之数命为带纵长立方高阔较，带纵长立方有带方法开之，得高根，为真一根之数。以此真一根之数除所命几真数为带纵平方积，真一根之数与所命几一乘方数相减余为带纵平方长阔和，带纵平方长阔和法开之，得长、阔两根，与前真一根之数共为通分法之三母，三数之计原真数皆合也。然或为长阔和之数过少，折半自乘尚不及其为带从平方积之数，则即无三数相淆，其真一根之数即为可知者已。[④]

“第五十一条”讨论了三次方程各项间连续正负变号的情形，实际上这一条结论并不正确。在“第五十一条”的探讨中，汪莱特别注意了避免“相淆”的情形，但他的关注点错误，导致没有得到开出一正根和三个正根的充分必要判别条件。实际上，他已经通过运算得出仅存在一根或三根的两种情形，但没有将根数情况抽象为“奇数”，错失了完成笛卡尔符号法则的机会。只强调数值解的倾向说明汪莱虽有很强的观察能力，但实际思维上距离数的一般概念比李锐更远。此外，汪莱还通过举反例的方式指出了李锐“三例”中第二例的不严谨之处，为方程理论的完善留下了新的空间。

四、理论完善：汪莱与李锐的接力

在互换了意见后，李锐与汪莱并没有停止对方程根数问题的思考，但两人的研究节奏不同。李锐于 1803 年加入张敦仁幕府，主要负责数学著作的校算任务，一部分张敦仁署名的数学作品亦有李锐的实际参与，在此期间，李锐还自著了《句股算术细草》和《弧矢算术》以完成天元术在几何计算领域的推广，另著《方程新术草》以阐释刘徽的方程思想，可见他没有立刻投入方程理论的攻关工作。

汪莱则是再接再厉，将二次、三次方程的思考推广至一般高次方程情形。1805 年，汪莱馆于扬州，与李锐再度探讨方程问题后，作《衡斋算学》第七册，主题为以可因式分解方程为例的一般形式高次方程的正根讨论，这也是汪莱一生中最后的数学理论著作。

---

① 李锐：《第五册算书跋》，李兆华：《衡斋算学校证》，第 208–209 页。

② 刘钝：《李锐与笛卡儿符号法则》，《自然科学史研究》1989 年第 8 期。

③ 李兆华：《衡斋算学校证》，第 210 页。

④ 汪莱：《第五十一条补法》，李兆华：《衡斋算学校证》，第 179–180 页。

在该册中，汪莱首先着眼于高次方程可以因式分解为多个简单方程乘积的形式，得出了“合而有数皆如本”的规律，即可因式分解的方程各因式的数值正根数相加可得总数值正根数，这一结论直接的理论意义不大，在后续讨论有关方程案例时，汪莱都给出了全部保持整数的因式分解形式，这些因式分解方程在汪莱的整体讨论中事实上起到了不失一般性的作用。在论述过程中，汪莱给出多个具体方程示例，这些方程许多都是保留了没有化简公约数的形式，对于读者来说有欠简洁。

此后，汪莱引入了“同式异理”的概念，即方程各项系数的正负号模式相同，但受具体系数不同的影响，数值正根个数不同的情形。这样一来，方程正根情况被汪莱简化为两个大类，即可以直接通过正负号判定是否有正根和不能通过正负号判定是否有正根，简称“同式同理”（此概念汪莱未直接提及，但事实上这样建构）和“同式异理”。

接下来，汪莱对“同式异理”情况“审有无”，汪莱难以接近一般性，但别具一格地探究了两任意次代数项和一个常数项组合而成的方程，即 $x^n-px^m+q=0$ 的形式。汪莱分别穷举了两项相差一次、两次和三次的情况，最终得到了存在正根的充要条件。当扩展至四项高次方程时，汪莱的结论均错误。若探究三项式时采用减根变换，根据李兆华的布算，继续以此探究四项式可得答案。[①] 仅以此论据推断，汪莱关于三项式和四项式一般情况的总结均以可因式分解的方程穷举后归纳所得，面对四项式的复杂情形时，穷举归纳法已力有不逮。但根据此前的工作，汪莱能够熟练使用减根变换，为何在四项式讨论时错失了正确答案，有待进一步探讨。

最后，汪莱在正负开方术的背景下，完善了确定初商的技巧，更加清晰地阐释了正负开方术求诸商的要点，并给出了求降阶方程的要点，这已经是初步具备了代开法思想的运算。此前研究仅强调代开法的创始人为李锐，[②] 尽管其完成形式出现在《开方说》中，但不能排除代开法由李锐和汪莱共同研讨最终由李锐给出的可能性。

纵观汪莱《衡斋算学》第七册的研究工作，可以看出，汪莱为了得到简化的结论，放弃追求具体的正根个数，直接以有无正根分野，并以可因式分解且不失一般性的方程进行穷举。这使他迅速归纳出了最简单的情形，将讨论范围缩小到“同式异理”的复杂情形。在“同式异理”情况的研究中，汪莱给出了三项式的正确判别方法，遗憾的是没能扩展到四项式中。在上述探讨中，汪莱回避了重根，但对数值正根的追求仍然体现了汪莱研究思想的局限性，使他无法完成根本性的理论突破。考虑到汪莱并没有将《衡斋算学》第七册的工作发展下去，可以认为第七册的工作已是汪莱所能达到的极限。

五、问题解决：《开方说》的理论建设工作

在结束了清廷《天文志》《时宪志》的编修工作后，汪莱于 1809 年赴安徽省石埭县任儒学训导，《衡斋算学》第七册则于 1810 年在石埭县付梓。1813 年，汪莱卒于儒学训导任上，而此时李锐也进入了人生的最后阶段。在汪莱提供的充分的理论准备基础上，李锐开始了《开方说》的撰写。《开方说》是李锐晚年的作品，系统化、理论化地呈现了李锐与汪莱的研讨成果，代表了第二次西学东渐以前中国方程研究的最高成就。其弟子黎应南在 1814 年得见李锐所示初稿，此时李锐病情已经加重。黎应南，广东顺德人，字见山，号斗一，嘉庆二十三年（1818）举人，官浙江丽水、平阳知县。1817 年李锐去世，黎应南遵其遗志补成下卷，全书于 1819 年完本。由于未及成书就逝世，李锐本人没有留下关于《开方说》的完整心路历程，仅有黎应南在跋中的

① 李兆华：《衡斋算学校证》，第 240–241 页。

② 朱家生：《李锐〈开方说〉研究》，洪万生主编：《谈天三友》，明文书局，第 285–310 页。

口授笔录部分：

> 开方者，除法也。超步定位，肇于少广。宋元诸家入以天元之术，有天元斯有正负，因有带从诸乘方。其式如阶级重重迤逦递进。或以正步负，或以负步正，有翻积，有益实，皆一定之理。李氏《测圆海镜》、秦氏《数学九章》均通其法，诚算家绝诣也。宣城梅氏著《少广拾遗》，立开一乘方以至十二乘方法，枝枝节节，窒碍难通，未免舍本而逐末。爰著《开方说》三卷，上卷起例发凡，胪列算式；中卷正负互易，平立代开，得数可定其大小，命分则齐以并差；下卷反复推求，有义必搜，无法弗备，可谓尽开方之变矣。①

在这段口授内容中，李锐以李冶和秦九韶为方程研究的至高点，批判了官方的数学研究榜样梅文鼎，简要介绍了《开方说》各卷的主要内容，其话语带有宋元数学和乾嘉学派的烙印。与乾嘉学派领袖相区别的是，李锐在紫阳书院的业师钱大昕一味推崇梅文鼎，而李锐在与黎应南的谈话中对梅文鼎以批评态度为主。在李锐主笔的《畴人传》中，梅文鼎被塑造为一个颠扑不破的数学与天文学巨匠，其专论部分更是写道："钱少詹（大昕）目为国朝算学第一，夫何愧焉。"②

黎应南的笔录是自江永的《翼梅》以来，首次发现的对梅文鼎的学术成果提出批评的记载。戴震为了调和梅文鼎与其业师江永的矛盾，在编修《四库全书》时将《翼梅》的作品名称改为《数学》，李锐在阮元幕府编写《畴人传》时亦随后称，此后又出现了《算学》《江氏数学翼梅》《慎修数学》《历学全书》等其他讹称，直至形成版本学公案。③ 可见，乾嘉学者不愿触及关于梅文鼎的争议。如果没有黎应南这段"非敢参以己见"的口述历史，而是李锐为《开方说》手书序言，后人难以从文献中得知至少是晚年的李锐对梅文鼎的真实态度。江永批评梅文鼎时，并没有站在更高的数学水平上，而从学术成果看李锐则完全有这样的资格。这说明了直至嘉庆时期，中国数学才从梅文鼎的肩膀上踏入了新的台阶。因此，李锐对前人和学术权威有着自己的独立见解，尽管出于尊敬或某种传统文化的规训，并不像汪莱一样在数学作品中直接指出，但他通过自己的数学工作得出新的真理性认识，从而推动数学事业的进步。这说明批判性思维在数学研究中是不可或缺的，只是它在社会文化的影响下有着不同的表现形式。

《开方说》上卷并不仅仅是李锐所说的"起例发凡，胪列算式"，除了兼采李、秦两家之长，通过案例展示了不同类型高次方程的开方技巧，还在总则中抽象地总结了一元高次实系数方程正根个数与其系数符号正负变化之间的关系，得出了基本符合笛卡尔符号法则的形式，并在卷中和卷下逐渐深化至实数以至于复数的一般情况。④

《开方说》上卷的开篇首先对全书的概念系统予以清晰地说明，这是宋元数学著作中所忽视的，体现出了西方数学和训诂学的影响。宋元数学的开方术名词系统沿袭《九章算术》方程一卷中的传统，但《九章算术》对高次多项式方程的讨论力有不逮，因此对高次项的理解直至贾宪所创"增乘开方法"正式确立，至秦九韶形成了相对简洁的语言习惯。但其中部分概念有些佶屈聱牙，初学者不便理解，李锐在《开方说》的开篇为这些定义提供了理论基础。李锐从中国传统数学中开方与除法一脉相承的理念出发，将天元术中的概念建构起来，一次方程与除法等价，结果为"商"，由此各次方程的正根均称为"商"。由于除法中被除数和除数被称为"实"和"法"，等价于一次方程的常数项和系数项。从二次方程开始，"实"被确立为常数项，"隅"为最高次项系数，"方"替代除法中的"法"成为一次项系数。从三次方程开始，增加"廉"为中间项系数，如三次方程的二次项系数为"廉"。从四次方程开始，中间项增多，则以二次项系数为"一廉"，升一次增加一"廉"，依次为"二廉""三廉"等（示例中仅举例至"二廉"），直

---

① 李锐：《开方说》卷下，同治十一年长沙白芙堂算学丛书。

② 阮元等撰：《畴人传》卷 38《梅文鼎（中）》，冯立昇主编：《畴人传合编校注》，中州古籍出版社，2012 年，第 340 页。

③ 徐道彬：《论江永与西学》，《史学集刊》2012 年第 1 期。

④ 钱宝琮：《中国数学史》，第 344–346 页。

至次高次项系数。秦九韶将二次项系数称为“上廉”，将次高次项系数称为“下廉”，但当方程次数继续升高时，一些中间项次数只能以“从上廉”“从下廉”等称呼命名，影响了方程表达的效率。李锐将“廉”前面的定语全部统一为数字编码，解决了这一弊端。考虑到写作《开方说》上卷时李锐尚未得见《四元玉鉴》等更高水平的元代数学著作，因此这一将宋元数学的“廉”与数字编码结合起来的策略可能源自焦循《乘方释例》手稿中“根一则累一”的原则。[①] 从这里可以看出，李锐没有接受借根方话语，这一方面合乎乾嘉学派复古的学术倾向，另一方面受表达效果的影响，即在中文书写的格式下天元术相比借根方更简便，这一点可以参看田淼的论证。[②] 同时，李锐没有对宋元数学亦步亦趋地照搬。从以上一些细微之处可以看出，李锐通过与同行的交流合作，主动将宋元开方术的话语系统朝着理论化的方向改进了。

确立基本概念之后，李锐又以明文规定“凡实常为负”，这本是秦九韶《数书九章》中算例的默认习惯，但秦九韶只是在具体算例中运用，没有将其作为规则予以文字说明，这体现了李锐在理论建设方面的严谨。“实常为负”运用了不失一般性的思想，却没有在数学上达成不失一般性，因为存在常数项为 0 的方程形式。李锐简述了方程各个系数的一般情况，即“除法为正，开方方、廉有正有负有空，隅有正有负”。“空”说明李锐对系数为 0 有所考虑，最高次项系数需要用来定义方程的次数，故默认不为 0。“实常为负”更像是拒绝了常数项为 0 的情况，在这种情况下，方程存在为 0 的根。显然，李锐不将常数项视为一般的系数，若在应用问题中出现无常数项的情况，只需消去未知数降次，随后依常规步骤求解，对此李锐未予理论说明。后文“商常为正”强调开方的结果导向为正数，与“实常为负”的并立只是文字组织上的对称性，但意义不同，对此李锐亦缺乏解释说明。李锐又根据秦九韶的“从常为正，益常为负”的规定对若干同义词进行了说明：“凡正方、正廉、正隅，亦谓之从方、从廉、从隅；负方、负廉、负隅，亦谓之益方、益廉、益隅。”秦九韶“从”“益”的提法是重言的，但“正”“负”更接近现代数学所接受的表达习惯。比较李锐和汪莱的文本组织形式可知，汪莱的著述从组织形式看更像是记录发现的手稿，李锐则尤其注重清晰性和条理性，因此后者最终完成了理论体系的建设工作。

正文的第一部分，李锐把在汪莱的启发下关于方程正根普遍情况的思考总结为四个条目和两条补充说明：

> 凡上负、下正，可开一数：除一，平方三，立方八,三乘方二十；
>
> 上负、中正、下负，可开二数：平方一，立方五,三乘方一十八；
>
> 上负、次正、次负、下正，可开三数或一数：立方一,三乘方七；
>
> 上负、次正、次负、正、下负，可开四数或二数：三乘方一。
>
> 假令有五位，上二位负，下三位正，即是上负下正，非止谓上一位负下一位正也，他皆仿此。
>
> 凡可开三数或止一数、可开四数或止两数，其二数不可开视为无数，凡无数必两，无无一数者。[③]

由于坚持了与汪莱合作时的正确探索，李锐对系数逐项变号的问题有所认识，但因缺乏先例的支持，他还没有直接以变号情况作为自变量概括出来，所以他先以符号改变的每一种基本情况作为纲，在纲要之后列明方程各个次数的情形所对应的正根数情况，这些情况包含的所有符号组合方案又在后文中被一一穷举出来。在宋元数学家的方程探索中，系数是直接给定的，但变号并不直接对应具体的系数，同一种变号模式要适用于所有的高次方程。李锐采用了从上至下的变号次序来表达符号变化的规律，使读者一目了然。

由于李锐在汪莱的基础上更加敏锐地发现了正负互易的规律，最终形式得以只需表达为四

---

① 焦循：《乘方释例》,《焦循算学九种》下册，刘建臻点校，广陵书社，2016 年，第 499 页。

② 田淼：《中国数学的西化历程》，山东教育出版社，2005 年，第 261–264 页。

③ 李锐：《开方说》卷上，同治十一年长沙白芙堂算学丛书。

个条目。可以看到，由于指明了方程次数高于四次的普遍情形并予以说明，李锐得到了完整的一般性结论，这个结论的表达形式已经与笛卡尔符号法则的完备表达非常接近，还创造性地提出了“无数”的概念，这甚至高于笛卡尔本人的最初探索结果，[①] 但在初等数学的范畴内，李锐停止了仍未穷尽的探索，即尚未将“变号”这一概念提炼出来。关注这一点绝非移时史学式地苛责这一时代的数学家，而是试图更为清晰地把握李锐的思路。上述结论出现在《开方说》上卷，即李锐早于 1814 年完成的部分，因此关于方程正根个数的探索并不因健康状况无法继续。

李锐清晰地表明了影响方程正根个数的两个自变量——正负号形式和次数，实际上，即便没有得到这两个自变量起作用的共同机制，李锐给出的形式清晰到只要稍加观察就可以发现，在正负号形式一定的条件下，可开之数必同奇偶。李锐的理论探索终止的唯一可能是，他对数字奇偶性不敏感。在古代生产实践中，数字奇偶性的应用也比较常见，但由于缺乏总结数学规律的传统，李锐在处理这些问题时，思路有些不够灵活。

《开方说》上卷的最后，李锐通过具体的方程讨论和研究他所总结的这些规律，并展示了解出方程多个正根的具体过程。在阐释和发展增乘开方法、正负开方术的基础上，李锐还穿插了他对“步法”的建构。“步法”源自《九章算术》，即估算初商。在直接开方中，最简单的思路就是一位一位轮流估算数值，与除法估算初商类似，李锐以建构天元术话语的叙事，从除法开始讲估算初商，直至高次方程估算初商及各个数位的技巧。李锐首先列举了纯粹的开方运算，即只开没有中间项系数的方程，这些开方计算即便位位估算也不会产生太大的计算量。

在解多项式方程的过程中，李锐认为解题者可直接依据常数项与最高次项比值的绝对值估算初商，再根据计算值进行调整。在不失一般性地将常数项定为负数，李锐继续将最高次项限制在 1 或 −1，实际上是一个有利于观察因式分解的方程形式，但李锐未意识到。随后，李锐给出了由他改进的解多项式方程的“步法”：

> 凡步之法，以正步负，或以负步正，皆主于减所步。凡平方可开二数者，以正方步负实，得第一数，小数也；以负隅步正方，得第二数，大数也。立方可开三数者，以正方步负实，得第一数，小数；以负廉步正方，得第二数，中数；以正隅步负廉，得第三数，大数。他皆仿此。[②]

实际上，李锐改进的“步法”就是通过相邻次项系数估算多项式方程的初商，再反复进退，逐渐逼近，从最小正根开始依次得到全部正根。李锐的这一创新有三重意义：第一，继承了增乘开方法的一般原则；第二，让传统的“步法”概念焕发了新的生命；第三，修补了宋元数学家只解出一个正根的不足。李锐“步法”的局限性在于，实际的方程计算并不总是简易的，这体现在李锐在“步法”理论之后列举的诸多解法案例中。李锐考虑到了尽可能多的情况，对于不能解尽的方程，李锐的案例中列举了正根为无限不循环小数的情况（而不是认识到无理数的性质），他依照宋元数学的传统采用命分法来逼近精确值，但确定分数的计算过程仍然有些繁琐。

《开方说》的中卷，李锐引入了负根，以实现对方程求根更广泛的讨论：凡商数为正，今令之为负，则凡平方皆可开二数，立方皆可开三数或一数，三乘方皆可开四数或二数，异名相步所得为正商，同名相步所得为负商。此后讨论的可开之数中，均默认需要讨论负根。由此，在已知方程的最多根数与其次数相等的基础上，李锐进一步提出可以应用他所创立的代开法不出遗漏地求出方程的全部根：

> 凡平方二数，以平方代开一数，其一数可以除代开之。立方三数：以立方开一数，其二数可以平方代开一数、除代开一数。三乘方四数：以三乘方开一数，其三数可以立方代开一数，

① 刘钝：《李锐与笛卡儿符号法则》，《自然科学史研究》1989 年第 8 期。

② 李锐：《开方说》卷上，同治十一年长沙白芙堂算学丛书。

平方代开一数，除代开一数。[①]

代开法的本质是已知方程某根基础上的因式分解，这样一来，无论第一数解出正根还是负根，只要代入原方程降次后，原方程就可以转化为一个已知根和另一个低一次的方程，次次降位，则可以解出全部可能的根。这一方法在实际解题中的局限性在于，如果解出无理根，无论是保留若干位小数，还是将其约为一个分数进行代开，解题者都会在后续代开步骤中承担几何增长的计算量。当方程系数变得复杂时，其作用仅限于避免遗漏。

从李锐《开方说》下卷的思路看，代开法的理论意义要高于计算意义。《开方说》的一个重要任务是将李锐与汪莱的学术切磋盖棺定论，其中汪莱对李锐提出的核心质疑便是重根缺乏理论性，导致根数判断的混淆，李锐对重根的坚持在于将重根计入根数可以形成更为凝练的规律，不对重根予以清晰的说明，符号法则也就站不住脚，因而李锐需要完成重根的理论建设以回应汪莱的质疑。对此，李锐的方案是将重根的理论性寓于解方程的过程之中，这个方案记录在经黎应南补遗的《开方说》下卷："凡可开二数以上而各数俱等者，非无数也，以代开法入之，可知。"尽管对重根的认识作为完整的理论表述出现在李锐晚年的口授中，但他与汪莱已经数次探讨该问题，这一部分实际上是回应汪莱对重根的挑战。

首先，李锐意识到哪怕开不出方程对应次数的根，亦必有元素可以补足，李锐在《开方说》上卷将其称为"无数"，即共轭虚根。但除了"无数"之外，还有一种容易混淆的情况，就是重根，李锐将其称为"各数俱等"，并特别将其与"无数"区分开，再来解决这些俱等之数被汪莱质疑的"有如恒河沙、不可思议、无量数"的问题。已知代开法可以作为不遗漏根的求解系统，这个求解系统的特点是一根一根解出、一次一次降次，每解出一个相同的根，便计入一个重根，于是每一组重根只要存在均可溯源。也就是说，尽管存在对代开法的工作原则缺乏说明的漏洞，李锐还是尽己所能地完成了对重根存在性的严谨证明，这一证明是通过演绎而非穷举实现的。

可以说，李锐已经尽可能地摆脱了传统数学的局限性，将方程理论发展到了初等数学体系内部的顶峰。尽管在现实时间上比笛卡尔、韦达等数学家晚得多，但李锐所依据的学术基础一定不如 17 世纪的欧洲，从这一角度来控制变量，可以说李锐有着不弱于笛卡尔的数学天赋。李锐能实现突破的关键在于，他最大限度地突破了传统数学实用性的局限，对负根、重根、虚根海纳百川。最终，李锐一方面借鉴西方数学推进了宋元数学的理论化，完成了乾嘉学术对数学学科提出的传承和发扬传统数学的任务，另一方面又解决了与汪莱所探讨的方程根数的遗留问题，实现了由方程理论到数系扩展的创新。黎应南完成了李锐生前未竟的工作，并将李锐的思路和数学思想在《开方说》后跋中予以补充，他的努力也应得到高度评价。

虽然李锐的遗作得以完成，但他与汪莱所创立的方程理论研究风格却没有形成传统。黎应南在完成《开方说》后便投身宦海，此后虽与项名达等一部分道光年间的数学家存在书信联系，但并未直接参与数学工作。道光十二年（1832），黎应南为罗士琳的《句股截积和较算术》作序，称"立天元一术，至今日发挥殆尽矣"，[②] 说明他从认识上确实无法将方程理论向前推进。更令人遗憾的是，道光年间一批具有天赋的数学家也没有重视这种理论研究的精神。直至中国重新认识世界，《开方说》与《衡斋算学》的研究均未能向前推进。

六、总结与思考

自《九章算术》以来，中国可以被认为数学长期处于一种与生产实践挂钩的范式之中，这

① 李锐：《开方说》卷中，同治十一年长沙白芙堂算学丛书。

② 罗士琳：《句股截积和较算术》，黎应南序，商务印书馆，1937 年。

一范式解决的谜题仅仅是生产实践或天文观测中的具体问题。求解是一切工作的终点，以至于求得方程合乎实际情形的根可以忽略另一个根，这也是为什么数学在中国古代以“算学”的身份示人，李约瑟对这一点的认识有些模糊，[①] 混淆了算术与代数的区别。在明清之际中西数学会通阶段，这种受生产实践束缚的数学研究模式在西方纯粹数学的冲击下逐渐松动。东传数学首先经历了传教士的引入与部分传统知识分子的抵触，最终在康熙年间由梅文鼎完成了以《中西算学通》为核心的会通工作。由于宋元数学在一定的历史时期里缺乏继承，梅文鼎的会通工作特别是对数学概念性的引入工作反而没有历史包袱的制约。最终《数理精蕴》引入借根方，西方的方程理论被官方有限承认，但彼时宋元数学的研究浪潮尚未兴起。当宋元数学著作特别是关于天元术的部分被重新探讨后，经过一定的辨别和理解，最终在乾隆年间由梅瑴成得到“天元一即借根方”的结论，这种认识表明中国数学已经具备对方程数理性的认识。但当时的中国数学仍然存在对天文学等具体问题的依附，许多数学工作以保留数位为目的，忽视对数系的认识。以明安图（1692—1765）《割圆密率捷法》为代表的理论数学活动只在私下进行，并没有形成一种研究风气。实际上，中国知识分子没有完全认识到借根方的抽象化水平更高，但在认真研究的过程中会受到这种抽象化水平的积极影响。

及至乾嘉学术发展至顶峰，纯粹数学活动获得了一定发展空间，李锐和汪莱很好地把握了这一历史机遇。汪莱具有“超异绝伦”的学术特质，他的批判精神加之对借根方话语的接受，使他被赋予了一双发现新问题的慧眼：“察秦九韶开方术及李冶天元一术，多以不可知为知者，遂就二乘方以下简且易者略为条目以正之。”[②] 数学研究具有确定性、精密性，其结论只能在推理和运算中得出，受学术权威的影响较其他学科更小。由于汪莱从宋元数学解方程的漏洞中发现了新问题，即方程根数问题，所以在汪莱和李锐的后续讨论中，李冶和秦九韶给出的方程案例不再被提及，最终转为纯粹的理论探讨。汪莱只将正数数值解视为有意义的，这距离数的一般性更远，在实质上没有完全摆脱生产实践的范式，一般根的判别是更抽象的数学问题，数值正根的判别则不同，汪莱甚至将重根的意义视为“相淆”。汪莱的理论很快从反常和革命的主体变成了客体，取而代之的是李锐将正根个数与符号变化的奇偶性联系起来，随之而来的是根数的普遍性乃至于数系的普遍性。因此，一场数学观念的变革诞生了——对数字现实意义的彻底摆脱。就从本案例来看，这种变革只靠指导思想的引领是不足的，李锐和汪莱的研究思路中都有来自对方的启发和自身独立的辨别，这些过程固然蕴含着指导思想，但也有赖于作为基础的“对方”，这体现了兼具竞争与合作的交流模式对数学发展的重要意义。

在缺乏符号代数和数形结合的基础的背景下，得到《开方说》这样的成就是殊为不易的。中国数学发展脉络中的对比显示，在没有西方代数学的引入时，方程在宋元数学的基础上发展出解法的改进及垛积招差，直至停滞；而在一定程度上接受西方代数学的基础上，方程最终发展为抽象的理论。但对西方代数学的接受未必能完全克服中国数学发展的局限性，观察道光年间中国数学发展的历史可以得知，对数的理解没有基于理念的问题仍然存在，李锐通过方程研究实现的对数系的认识没有得到其他数学家的回应，方程理论的研究仍然局限于仅有的一些孤独的探索者个体。

即便是在嘉庆这一具有突破性的时代，李锐和汪莱在数学上仍然是孤独的。必须认识到，清代没有科学共同体，同一时期李锐和汪莱之外的数学活动参与者，或者说宋元数学的学习和总结者，缺乏专业性的数学认识，其本质是文献研究者而非数学家。即便是“谈天三友”之一的焦循，对方程也只有理解和运用的水平。焦循对中国数学的贡献是首创了符号代数的形式，

---

① 李约瑟：《文明的滴定：东西方的科学与社会》，张卜天译，商务印书馆，2017 年，第 6–7 页。

② 李兆华：《衡斋算学校证》，第 163 页。

但这一贡献更多在理念层面，其动机还是依附于人文主义。他对具体数学问题的技术性认识，达不到李、汪的高度，因此收到汪莱的书稿后，竟将关注点放在“言秦、李之非”上，对汪莱的著作所引发的危机并不敏感。江藩对数学的认识更加受到理解水平的局限，虽与汪莱、李锐均有交游，却难以理解方程理论研究的学术价值，作出以讹传讹的记载也不足为奇了。 实际上，二者在面对具体问题上，都能求真务实，李锐关于根数的后续研究实际上承认了汪莱的创新思维，从正根个数到普遍根数的发展，是李锐自觉完成的。因此，在学术上认同更保守的派系并不构成影响数学思维的变量。汪莱是探索一般性的先行者，但治学更加“平稳”的李锐却率先突破正根和数值解的束缚，这一点却没有被“超异绝伦”的汪莱所接受。因此，汪、李分歧的误解是外行评价内行的结果，同一时代的人文主义者试图过多地将这一历史事件纳入某种数学之外的框架，实为舍本逐末。科学有其自身的发展规律，嘉庆年间宋元数学在中国的重新发现与理论推进，既合于科学理论发展向前的趋势，又根植于中国独特的历史文化渊源。

References

Elman, Benjamin A. *On Their Own Terms: Science in China, 1550–1900*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2005.

Kawahara, Hideki. *Seigaku Tozen to Higashi Ajia*. Tokyo: Iwanami Shoten Publishers, 2015.

Liu Dun. “Lirui yu dikaer fuhao faze” (Li Rui and the Cartesian Rule of Signs). *Zirankexueshi yanjiu* (Studies in the History of Natural Sciences) 8. 2 (1989).

Li Yan. *The Outline of Chinese Mathematics*. Beijing: The Commercial Press, 2020.

Li Zhaohua. “Wanglai fangchenglun yanjiu” (A study of Wang Lai’s Theory of Equation). *Zirankexueshi yanjiu* (Studies in the History of Natural Sciences) 8. 2 (1989).

Needham, Joseph. *The Grand Titration: Science and Society in East and West*. London: George Allen & Unwin Ltd, 1969.

Qian Baocong. *A History of Chinese Mathematics*. Beijing: The Commercial Press, 2019.

Tian Miao. *The Westernizing Process of Chinese Mathematics*. Jinan: Shandong jiaoyu chubanshe, 2005.

Zheng Jianjian, and Wang Yikai. “Guanyu wanglaide zihao jiqita” (Textual research on some problems relating to Wang Lai). *Zhongguo keji shiliao* (Chinese Historical Materials of Science and Technology) 11. 3 (1992).

A Historical Review of the Development of Equation Theory in China during the Jiaqing Reign

GAO Muyuan (School of Humanities, University of Chinese Academy of Sciences; gaomuyuan19@mails.ucas.ac.cn)

Abstract: During the Jiaqing period of the Qing Dynasty, Chinese equation theories achieved a breakthrough development by virtue of the influx of Western learning and the rediscovery of Song and Yuan mathematics. Wang Lai discovered the problem of incomplete solutions to equations in the *Mathematical Treatise in Nine Sections*, and began to devote himself to the general case of the positive numerical roots of equations. Li Rui a scholar of Song and Yuan mathematics, explored the sign rule based on his communication with Wang Lai. In the face of Wang Lai’s new query and the need to develop the mathematics of Song and Yuan Dynasties, Li Rui’s *Kai Fang Shuo* finally perfected the universal rule of the root number of equations, and in this process proposed the extension of the number system.

Keywords: Jiaqing, mathematics, equation, Li Rui, Wang Lai